Równania drugiego stopnia z jedną niewiadomą

Równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0$ nazywamy równaniem drugiego stopnia lub równaniem kwadratowym. Jest ono szczególnym przypadkiem równania wielomianowego postaci:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... a_1 x + a_0 = 0$$

jeśli przyjmiemy $n = 2$, $a_2 = a$, $a_1 = b$ i $a_0 = c$

Jeśli w równaniu kwadratowym współczynnik przy x^2 jest równy jedności to zapisujemy je w postaci

$$x^2 + px + q = 0$$

Każdy równanie postaci $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$ można zapisać w postaci równania ze współczynnikiem przy x^2 równym jedności poprzez podzielenie go przez a. Mamy więc $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$. Dzielimy równanie przez a i otrzymujemy $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Oznaczamy $\frac{b}{a} = p$ oraz $\frac{c}{a} = q$ i otrzymujemy:

$$x^2 + px + q = 0$$

.

Rozwiązania równania kwadratowego w niepełnej postaci

A. Jeśli $b = c = 0$, to równanie przyjmuje postać $ax^2 = 0 \quad (a \neq 0)$.
Rozwiązując je w zbiorze liczb rzeczywistych otrzymujemy $x^2 = 0$ skąd $x_1 = 0$ oraz $x_2 = 0$.

B. Jeśli $b = 0$, to równanie przyjmuje postać: $ax^2 + c = 0$ $(a \neq 0)$. Rozwiązując je w zbiorze liczb rzeczywistych otrzymujemy $x^2 = -\frac{c}{a}$. Jeśli $\frac{c}{a} < 0$, to $-\frac{c}{a} > 0$ i otrzymujemy:$|x| = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, czyli $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ dla $x < 0$ oraz $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ dla $x \geqslant 0$.

C. Jeśli $c = 0$, tor ównanie przyjmuje postać: $ax^2 + bx = 0 \quad (a \neq 0)$. Rozwiązując je w zbiorze liczb rzeczywistych otrzymujemy: $x(ax + b) = 0$, skąd $x_1 = 0$ oraz $x_2 = \frac{b}{a}$.

Rozwiązania równania kwadratowego w pełnej postaci

Twierdzenie 1. Jeśli $b^2 - 4ac \geqslant 0$ (wyróżnik równania kwadratowego oznaczany symbolem Δ), to równanie $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ w dziedzinie liczb rzeczywistych ma dokładnie dwa rozwiązania określone wzorami:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dowód

Mnożąc obie strony równania $ax^2 + bx + c = 0$ przez $4a \neq 0$ otrzymamy

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Wykorzystując wzory skróconego mnożenia możemy powyższe równanie zapisać w postaci:

$$(2ax + b)^2 - b^2 + 4ac = 0$$

Przenosząc dwa składniki na drugą stronę równania otrzymamy:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Jeśli $b^2 - 4ac \geqslant 0$, to wyciągając pierwiastek kwadratowy z obu stron równania otrzymujemy:

$$|2ax + b| = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Równanie ostatnie jest równoważne układowi dwóch równań:

$-2ax - b = \sqrt{b^2 - 4ac}$ dla $2ax + b < 0$

$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac}$ dla $2ax + b \geqslant 0$

Z powyższego układu otrzymujemy dwa rozwiązania:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Z postaci wzorów na x_1 i x_2 widać, że jesli $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, to $x_1 \neq x_2$.

Jeśli $\Delta = 0$, to $x_1 = -\frac{b}{2a}$ oraz $x_2 = -\frac{b}{2a}$ czyli $x_1 = x_2$.

Jeśli chcemy zapisać wzory na rozwiązanie równania w postaci $x^2 + px + q = 0$, to należy we wzorach na x_1 i x_2 przyjąć $a = 1$, $b = p$ i $c = q$. Otrzymuje się wtedy:

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Bo np. $x_1 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} = \frac{-p}{2} - \frac{\sqrt{p^2-4q}}{2} = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2-4q}{4}} = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Twierdzenie 2. (Viety)

1. $$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = p$$

2. $$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = q$$

Dowód

$x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} = p$

$x_1 x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} = q$

Własności rozwiązań (pierwiastków) równania kwadratowego postaci $ax^2 + bx + c = 0$

(W zależności od wartości współczynników a, b, c i wyróżnika Δ).

Zakładamy, że $a > 0$.

1. Jeśli $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, to równanie ma dwa różne co do wartości pierwiastki. Jeśli $c > 0$, to pierwiastki są tego samego znaku, przeciwnego do znaku współczynnika b. Jeśli $c < 0$, to pierwiastki mają różne znaki, przy czym co do bezwzględnej wartości większy jest ten, którego znak jest przeciwny do znaku współczynnika b.

2. Jeśli $\Delta = 0$, to równanie m dwa równe co do wartości pierwiastki. (Znak pierwiastków jest przeciwny do znaku współczynnika b).

3. Jeśli $\Delta < 0$, to równanie nie posiada pierwiastków rzeczywistych.(są jednak dwa pierwiastki zespolone).

Rozkład trójmianu kwadratowego na czynniki

Wyrażenie $ax^2 + bx + c$ dla $a \neq 0$ nazywamy trójmianem kwadratowym. (Jest to lewa część równania $ax^2 + bx + c = 0$). Wyrażenie $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywamy wyróżnikiem trójmianu kwadratowego.

Twierdzenie 3 Jeśli $\Delta \geqslant q0$, to trójmian kwadratowy można rozłożyć na iloczyn czynników z rzeczywistymi współczynnikami:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

gdzie: x_1 i x_2 są pierwiastkami trójmianu kwadratowego.

Dowód

$$a(x - x_1)(x - x_2) = a[x^2 - x_2 x - x_1 x + x_1 x_2] = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) \tag{1}$$

$$= a\left(x^2 - \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right) x + \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \tag{2}$$

$$= a\left(x^2 - \frac{-2b}{2a}x + \frac{b^2-\Delta}{4a^2}\right) \tag{3}$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c \tag{4}$$

Postać kanoniczna trójmianu kwadratowego

Postacią kanoniczną trójmianu kwadratowego ax^2+bx+c nazywamy wyrażenie postaci $a(x-p)^2+q$. Aby dla danego trójmianu ax^2+bx+c znaleźć postać kanoniczną trzeba przeprowadzić następujące przekształcenia:

$$ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{a}x\right)+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+c =$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} = a(x-p)^2+q$$

gdzie: $p=-\frac{b}{2a}$ oraz $q=-\frac{\Delta}{4a}$

Z postaci kanonicznej trójmianu kwdratowego łatwo uzyskać wzory na pierwiastki.

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=0$$

Powyższą równość dzielimy obustronnie przez a i otrzymujemy:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$

Gdy $\Delta \geqslant 0$, to

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2=0$$

Z wzoru skróconego mnożenia $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ otrzymamy:

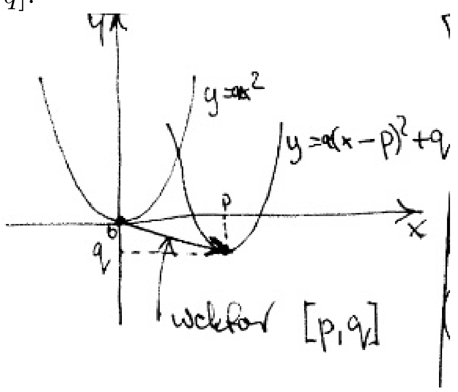
$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

Czyli $\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$

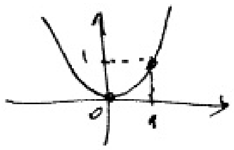
Stąd otrzymujemy wzory na pierwiastki trójmianu:

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

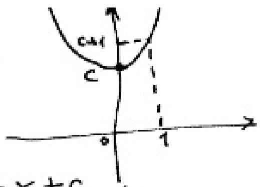
Graficznie - postać kanoniczna jest przesunięciem wykresu funkcji $y=x^2$ o wektor $[p,q]$.



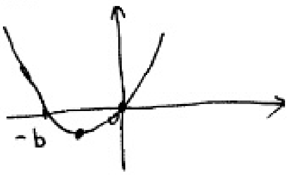
$y = x^2$



$y = x^2 + c$



$y = x^2 + bx$



$y = x^2 + bx + c$